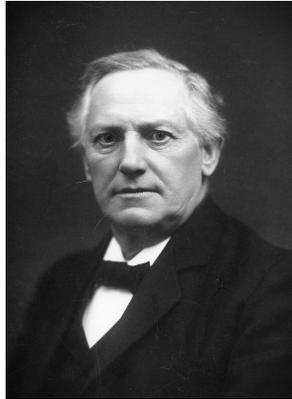


## Le procédé d'orthonormalisation

– Un sonnet mnémotechnique –



Ci-dessus: Jørgen P. Gram (gauche) et Erhard Schmidt (droite).

Pénurie d'angles droits, besoin d'un recadrage ?  
 Ne seriez-vous pas las de ces bases sauvages ?  
 Oyez, braves matheux, sortez de vos guérites,  
 Écoutez les conseils de messieurs Gram et Schmidt !

Divisez par sa norme un vecteur esseulé.  
 Si vous en avez  $n$ , pensez à morceler :  
 Supposons qu' $n - 1$  vous soient déjà plaisants,  
 Trouvez le dernier-né et saisissez vous-en !

Retranchez-lui ce qui, chez ses frères, lui pèse ;  
 Frais, libre, orthogonal et revitalisé,  
 Il ne vous reste plus qu'à le normaliser.

Ainsi par récurrence on poursuit la genèse.  
 Plus fort que Vandermonde et plus simple qu'Hermite,  
 C'est l'humble procédé de messieurs Gram et Schmidt !

*G.D.*

### Commentaires mathématiques

Soit  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ ,  $n \leq N$ , une famille libre.

Étape 1: normaliser  $v_1$ .

$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Étape 2: alléger  $v_2$  de sa projection sur  $u_1$ ,  
 puis normaliser.

$$u_2 := \frac{v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1}{\|v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1\|}.$$

NB:  $(v_2 \cdot u_1)u_1$  est la projection de  $v_2$  sur  $u_1$ .

Étape  $k + 1$ : alléger  $v_{k+1}$  de toutes ses com-  
 posantes en les  $u_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ), puis normaliser.

$$u_{k+1} := \frac{v_{k+1} - \sum_{j=1}^k (v_{k+1} \cdot u_j) u_j}{\|v_{k+1} - \sum_{j=1}^k (v_{k+1} \cdot u_j) u_j\|}$$

NB:  $\sum_{j=1}^k (v_{k+1} \cdot u_j) u_j$  est la projection de  
 $v_{k+1}$  sur l'espace  $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ .

**Résultat final:** cet algorithme transforme  
 la famille libre  $v_1, \dots, v_n$  en une famille or-  
 thonormale  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^N$  telle que

$$\forall k \leq n, \quad \langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle.$$

*Une première version de ce sonnet a remporté en 2009 le premier prix du concours 'Théorimes' du lycée Louis le grand.  
 Il a depuis été utilisé à de nombreuses reprises à des fins pédagogiques.*